

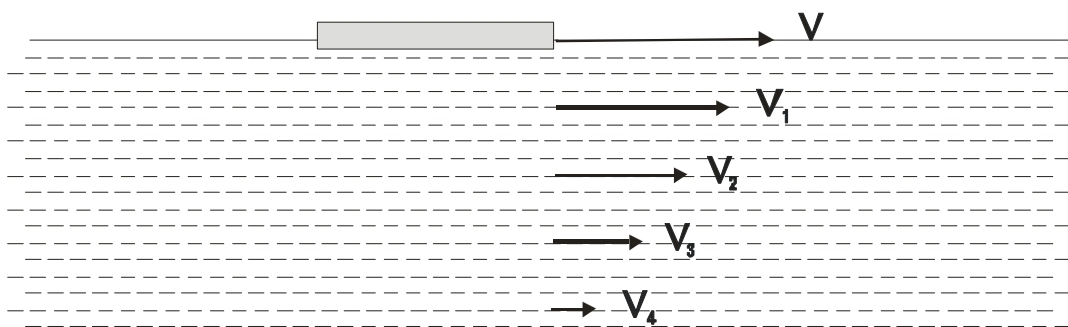
Ćw. 9.1. Wyznaczanie współczynnika lepkości dynamicznej metodą Stokesa

Wprowadzenie

Podczas ruchu płynów rzeczywistych (cieczy i gazów) istotne znaczenie odgrywa zjawisko lepkości zwane też zjawiskiem tarcia wewnętrznego. Polega ono na powstawaniu sił oporu, które towarzyszą przepływowi płynu.

Przepływ ten może być dwojakiego rodzaju. Jeśli można wyodrębnić płynące równolegle, na ogół z różnymi prędkościami, nie mieszające się warstwy płynu, to mamy do czynienia z **przepływem laminarnym** (warstwowym). Wartości prędkości i jej kierunku w różnych punktach nie zmieniają się w sposób przypadkowy. Natomiast przepływ w obrębie którego elementy płynu poruszają się po skomplikowanych, przeplatających się i chaotycznie zmieniających kierunki torach nazywa się **przepływem burzliwym – turbulentnym**. Nie można tu wyróżnić nie mieszających się warstw płynu, a prędkości w danym punkcie zmieniają się w sposób przypadkowy. Opory ruchu w przypadku przepływu burzliwego są znacznie większe niż przy przepływie laminarnym. O charakterze przepływu można wnioskować na podstawie wartości **liczby Reynoldsa** charakteryzującej przepływ nieściśliwego płynu lepkiego.

Omawiając zjawiska w cieczach traktować je będziemy jako płyny lepkie i nieściśliwe. Jeśli w zbiorniku z cieczą rzeczywistą po powierzchni porusza się płytka ze stałą prędkością v , to w wyniku działania sił przylegania warstwa cieczy tuż przy płytce porusza się będzie z taką samą prędkością co płytka. Natomiast warstwy cieczy położone głębiej poruszać się będą z prędkościami tym mniejszymi, im dalej położone są od poruszającej się płytki (rys. 1).



Rys. 1. Rozkład prędkości warstwek cieczy podczas przepływu laminarnego.

Między przesuwanymi względem siebie warstwami cieczy działają siły tarcia wewnętrznego styczne do tych warstw. Powodują one zmniejszenie prędkości warstwy poruszającej się szybciej wskutek oddziaływania z warstwą wolniejszą, a jednocześnie prędkość warstwy wolniejszej wzrasta na skutek oddziaływania z warstwą szybszą.

Dla przepływu laminarnego siłę lepkości między warstwami o powierzchni S odległymi o dz i działającą stycznie do warstw (rys. 2) można przedstawić za pomocą **wzoru Newtona**:

$$F = \eta \cdot \frac{dv}{dz} \cdot S. \quad (1)$$



Rys. 2. Siły tarcia wewnętrzne podczas laminarnego przepływu cieczy.

Jak widać siła tarcia wewnętrzne jest proporcjonalna do gradientu prędkości (dv/dz) w kierunku prostopadłym do kierunku ruchu warstw. Współczynnikiem proporcjonalności jest **współczynnik lepkości dynamicznej** η (eta). Jest on liczbowo równy sile stycznej koniecznej do utrzymania różnicy prędkości 1 m/s między dwiema warstwami cieczy o powierzchni 1 m² każda przesuwającymi się względem siebie w odległości 1 m. Jednostką współczynnika lepkości jest $[\eta] = \text{N} \cdot \text{s} / \text{m}^2$. Używana jest również jednostka spoza układu SI zwana pauzem: 1P = 0,1 N·s/m².

Dla określenia lepkości cieczy stosuje się również **współczynnik lepkości kinematycznej**, równy stosunkowi współczynnika lepkości dynamicznej do gęstości cieczy:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]. \quad (2)$$

Zjawisko lepkości w gazach znajduje wytłumaczenie na gruncie teorii cząsteczkowej budowy materii. Między równoległymi przylegającymi do siebie warstwami ma miejsce wymiana pędów spowodowana przedostawaniem się cząsteczek z jednej warstwy do drugiej. Cząsteczki opuszczające warstwę wolniejszą i przenikające do warstwy szybszej powodują spadek pędu warstwy szybszej. Natomiast cząsteczki z warstwy szybszej przyspieszają warstwę wolniejszą. Wynika to z drugiej zasady dynamiki ($F = dp/dt$) gdyż zmiana pędu warstwy związana jest z działaniem odpowiedniej siły. Ze wzrostem temperatury nasila się wymiana cząsteczek między warstwami, przez co lepkość gazu wzrasta.

W cieczech w temperaturach dalekich od temperatury krytycznej sytuacja jest bardziej skomplikowana, gdyż oddziaływania między cząsteczkami są dosyć silne i wykonują one drgania wokół chwilowych położeń równowagi. Zatem pędy cząsteczek nie pozostają stałe lecz ulegają dużym wahaniom.

Jeśli wartość współczynnika lepkości zależy tylko od rodzaju cieczy, temperatury i ciśnienia, to mamy do czynienia z tzw. **cieczami newtonowskimi**. Wówczas zależność tę można wyrazić wzorem:

$$\eta = A \cdot e^{\frac{E_a}{kT}}, \quad (3)$$

gdzie: A – współczynnik proporcjonalności, bardzo słabo zależny od temperatury; k – stała Boltzmanna; T – temperatura bezwzględna; E_a – energia aktywacji przepływu lepkiego. Rośnie ona wraz z ciśnieniem zewnętrznym i maleje ze wzrostem temperatury.

Z teorii lepkości cieczy wynika, że przejście cząsteczki z jej położenia równowagi w kierunku przepływu jest możliwe gdy uzyska ona określoną energię zwaną energią aktywacji lepkości. Względną liczbę cząsteczek mających w danej temperaturze energię równą co najmniej energii aktywacji określa funkcja rozkładu Boltzmanna: $\Delta n_a/n = \exp(-E_a/kT)$. Ze wzrostem temperatury rośnie energia bezładnego ruchu cząsteczek, przez co większa ich liczba ma energię większą od energii aktywacji i rośnie wartość wyrażenia $\Delta n_a/n$. Tym samym współczynnik lepkości maleje.

Zależność lepkości cieczy od temperatury jest dosyć silna, gdyż na przykład wzrost temperatury wody od 20 do 55°C powoduje spadek jej współczynnika lepkości o połowę.

Metoda pomiaru

Podczas ruchu ciała w cieczy opory ruchu zależą głównie od jego kształtu i prędkości. Gdy ciało ma opływowe kształty i porusza się z niewielką prędkością, wówczas warstwa cieczy przylegająca do ciała porusza się z taką samą prędkością jak ciało i powoduje ruch warstw sąsiednich. Między przesuwanymi się warstwami działają siły lepkości hamujące ruch warstw najszybszych, czego wynikiem jest również powstanie siły hamującej ruch samego ciała. Dla kulki o promieniu r poruszającej się z prędkością v wartość tej siły określa **prawo Stokesa**:

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v . \quad (4)$$

Może być ono wykorzystane do wyznaczenia wartości współczynnika lepkości cieczy. Gdy niewielka kulka o gęstości większej od gęstości cieczy znajdzie się w cieczy, to w trakcie ruchu działać będą na nią trzy siły: siła ciężkości ku dołowi (P) i skierowane ku górze siła wyporu (Q) i siła tarcia wewnętrznego (F) (rys. 3).

Siłę ciężkości wyrazimy wzorem:

$$P = m \cdot g = V \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g , \quad (5)$$

gdzie: V - objętość kulki; ρ - gęstość kulki; r - promień kulki; g - przyspieszenie ziemskie.

Siła wyporu hydrostatycznego jest równa:

$$Q = V \cdot \rho_c \cdot g = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_c \cdot g , \quad (6)$$

gdzie: ρ_c - gęstość cieczy.

Jeśli kulka zostanie wpuszczona do cylindra tuż nad powierzchnią cieczy, to początkowo opadać będzie **ruchem przyspieszonym**, gdyż siła ciężkości kulki jest większa od sumy sił wyporu i lepkości. Gdy prędkość kulki rośnie to zgodnie z prawem Stokesa rośnie również hamująca siła tarcia wewnętrznego i przyrost prędkości jest coraz wolniejszy. W końcu siła lepkości jest na tyle duża, że zachodzi równość:

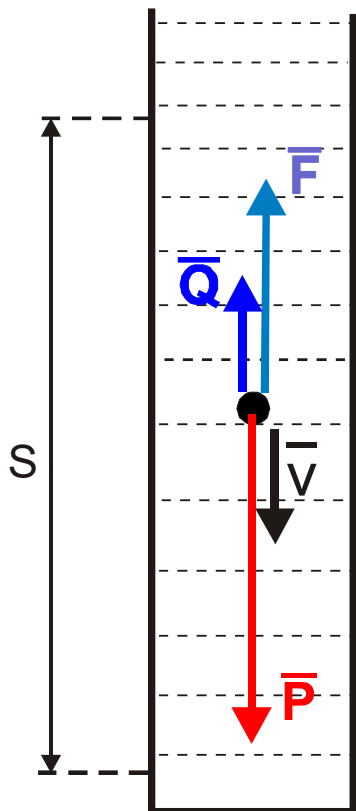
$$P = Q + F . \quad (7)$$

Od tej chwili kulka poruszać się będzie **ruchem jednostajnym** ze stałą prędkością v . Podstawiając odpowiednie wyrażenia na siły otrzymujemy:

$$\frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_c \cdot g + 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v , \quad (8)$$

Po przekształceniu wyrażenie na współczynnik lepkości otrzymuje postać:

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho - \rho_c)}{9 \cdot v} . \quad (9)$$



Rys. 3. Siły działające na kulkę poruszającą się w cylindrze z cieczą.

Ponieważ w naszym doświadczeniu zbiornik z cieczą nie ma nieskończonych rozmiarów, lecz jest cylindrem o promieniu R , więc ze względu na dodatkowe oddziaływania hamujące należy zastosować **zmodyfikowany wzór Stokesa**:

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot (1 + 2,4 \cdot r/R) . \quad (10)$$

Prędkość ruchu jednostajnego kulki wyznaczamy mierząc drogę i czas spadania kulki ($v = s/t$), więc ostatecznie wzór do obliczenia współczynnika lepkości przyjmuje postać:

$$\eta = \frac{2 \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho - \rho_c) \cdot t}{9 \cdot s \cdot \left(1 + 2,4 \frac{r}{R}\right)} , \quad (12)$$

gdzie:

- r - promień kulki;
- ρ, ρ_c - gęstość materiału kulek i gęstość cieczy;
- t - czas ruchu jednostajnego kulki;
- s - droga ruchu jednostajnego;
- R - promień wewnętrzny cylindra;
- g - przyspieszenie ziemskie.

Zagadnienia do kolokwium:

1. Pojęcie i zjawisko lepkości.
2. Siły tarcia wewnętrznego, wzór Newtona.
3. Przepływ laminarny i turbulentny.
4. Współczynnik lepkości.
5. Prawo Stokesa.
6. Ruch kulki opadającej w cieczy. Analiza sił działających na kulkę i rodzajów ruchu.